BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVIENSIS
kat. komp.
55513
II

55513 kat. komp.
II
matem

O FUNKCYJACH

BERNOULLIEGO.

NAPISAŁ

Dr. MARYJAN A. BARANIECKI,
docent prywatny Uniwersytetu w Warszawie.

Osobne odbicie z XIII tomu Rozpraw Wydz. matem.-przyr. Akad. Um.

Biblioteka Jagiellońska
1002746221

KRAKÓW,
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Ignacego Stelcla.
1885.

Matem 1199. br.
13.

B J C

55573 II

O FUNKCYJACH BERNOULLIEGO.

Napisał

Dr. Maryjan A. Baraniecki

docent prywatny Uniwersytetu w Warszawie.

JAKÓB BERNOULLI piérwszy (*Ars conjectandi, Basileae, 1713*) zauważył pewne liczby, stale zjawiające się jako spółczynniki w ostatnich wyrazach rozwinięć sumy potęg parzystych jednakowych z liczb naturalnych od 1 do $k-1>1$ podług potęg malejących k — niezależnie od tego, jaka mianowicie jest ta liczba k. Już EULER przy pomocy tych liczb BERNOULLIEGO wyraża spółczynniki rozwinięcia tang. x podług potęg x. Obecnie wchodzą one do wielu wyrażeń zasadniczych w analizie; dla tego różnémi sposobami mogą być wprowadzane do wykładu systematycznego. A tak ze względu na wyrażenia, w których te liczby zachodzą, jak i z powodu ciekawych swych własności, częściowo nadto analogicznych z własnościami niektórych grup innych liczb, stanowią one wciąż przedmiot badań, nieschodzący z porządku dziennego w nauce.

Znakowania używane dla liczb BERNOULLIEGO bywają rozmaite, tak iż wspomniany spółczynnik najniższéj potęgi k

w rozwinięciu sumy $2p$-ych potęg wypadnie odpowiednio przedstawić:

albo $(-1)^{p-1} B_p$, przy $p=1, 2,\ldots$; $B_0 = -\frac{1}{2}$ (np. Bertrand, Hermite, Stern, Jordan);

albo $(-1)^{p-1} B_{2p-1}$, przy $p=1, 2,\ldots$; $B_0 = -\frac{1}{2}$ np. Schlömilch, Hoüel);

albo B_{2p}, przy $p=1, 2,\ldots$; $B_1 = -\frac{1}{2}$ (np. Price, Lucas).

Używać tu będziemy ostatniego z tych znakowań, jako najdogodniejszego, jak to, co do własności liczb Bernoulliego, najlepiéj uwidacznia znakomita praca: *Théorie nouvelle des nombres de* Bernoulli *et d'*Euler, którą p. Edward Lucas ogłosił w *Annali di matematica* Brioschiego (seryja II, tom VIII, 1877).

Przy pomocy właśnie wyrażeń, odpowiadających wyrażeniom p. Lucasiego własności liczb Bernoulliego we wzmiankowanéj jego pracy, wyprowadzimy w tym artykule znane własności tak nazwanych przez Raabego funkcyj Bernoulliego (których znakowania u rozmaitych autorów różnią się niekiedy czynnikiem stałym, odpowiednim każdéj funkcyi) w sposób prostszy i jednostajniejszy od sposobów dotąd używanych. Nie będziemy zaś wyprowadzali tych własności funkcyj Bernoulliego, które, wynikając wprost z poprzednich własności, same już odmiennemu przedstawieniu uledz nie mogą; wspomnimy je tylko, aby artykuł niniejszy przedstawiał całość, do pewnego stopnia zamkniętą. Nadto w ustępie 3-im podajemy trzy nowe związki między liczbami Bernoulliego.

I.

Kładąc

$$u = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(k-1)x}$$

$$= \frac{e^{kx} - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^{kx} - 1}{x},$$

mamy, przy $x=0$, $n=1, 2, \dots, (k>2)$. Biorąc wyrażenia u n-tą pochodnę i w niéj zakładając $x=0$, mamy:

$$u^{(n)} = 1^n + 2^n + \dots + (k-1)^n$$
$$= \left[\left(\frac{x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{kx}-1}{x}\right)^{(n)}\right]_0,$$

zkąd, stosując wzór LEIBNITZA na n-tą pochodną iloczynu i nazywając

$$1^n + 2^n + \dots + (k-1)^n = S_n, \quad \left[\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{(n)}\right]_0 = B_n$$

$(B_3 = B_5 = \dots = B_{2p+1} = 0)$, otrzymamy $(n=1, 2, \dots)$

$$S_n = \frac{1}{n+1}\Big\{ k^{n+1} + (n+1)_1 B_1 k^n + \dots + (n+1)_m B_m k^{n-m+1}$$
$$+ \dots + (n+1)_{n-1} B_{n-1} k^2 + (n+1)_n B_n k \Big\}. \quad (1)$$

Jeżeli umówimy się, iż $B^m = B_m$, a $B^0 = B_0 = 1$, to wzór ostatni możemy symbolicznie tak przedstawić $(n=1, 2, \dots)$:

$$(n+1) S_n = (k+B)^{n+1} - B_{n+1},$$

czyli $(n=2, 3, \dots)$

$$n S_{n-1} = (k+B)^n - B_n. \quad (2)$$

Gdy w tym wzorze zamiast k weźmiemy $k+1$, to otrzymamy $(n=2, 3, \dots)$

$$n\left\{1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (k-1)^{n-1} + k^{n-1}\right\} =$$
$$= (k+1+B)^n - B_n;$$

ztąd zaś, po odjęciu równości (2) stronami odpowiedniemi, mieć będziemy ($n = 2, 3, \ldots$)

$$(3) \qquad nk^{n-1} = (k + 1 + B)^n - (k + B)^n .$$

Chociaż na stronach lewych wzorów (1) lub (2) liczba k otrzymuje tylko wartości dodatne, całkowite i większe od 2, to jednak na stronach prawych tych wzorów (rozważanych niezależnie od stron lewych) k może być wogóle liczbą zmienną w sposób ciągły, przybiérającą wartości tak dodatne, jak i ujemne. Oznaczmy tę zmienną przez y. Wtedy strona prawa wzoru (2), przedstawiająca funkcyję całkowitą zmiennéj y stopnia $n$go, ze spółczynnikiem 1 przy y^n, któràto funkcyję nazwijmy $\varphi_n(y)$, t. j. funkcyja

$$(4) \qquad \varphi_n(y) = (y + B)^n - B_n ,$$

jest t. z. funkcyją Bernoulliego. To wyrażenie (4), jako wynikające z (2), powinnoby się stósować tylko do wartości $n = 2, 3, \ldots$. Lecz, kładąc na stronie prawéj wzoru (2) $n = 1$, czyli na stronie prawéj wzoru (1) $n = 0$, otrzymamy jeszcze (zauważmy, że $S_0 = k - 1$, a $u_0 = k$)

$$(5) \qquad \varphi_1(y) = y,$$

funkcyją całkowitą zmiennéj y stopnia 1-go. Możemy przeto przyjąć, iż w wyrażeniu (4) argument n otrzymuje wartości $1, 2, \ldots$.

Związek ($n = 2, 3, \ldots$)

$$(6) \qquad (y + 1 + B)^n - (y + B)^n = ny^{n-1} ,$$

według wzoru (3), wynikającego ze wzoru (2) w założeniu $k > 2$, zachodzi przy wszelkich wartościach na y dodatnych, całkowitych i większych od 2. Atoli obie jego strony przedstawiają funkcyje całkowite stopnia $(n - 1)$go zmiennéj y. Zatém równość (6), czyli, według (4), równość ($n = 2, 3, \ldots$)

$$\varphi_n(y+1)-\varphi_n(y)=ny^{n+1} \tag{6'}$$

będzie zachodziła przy wszelkich wartościach zmiennéj y.

Ze związku (6) można, nadając różne wartości zmiennéj y, wyprowadzić rozmaite związki między liczbami Bernoulliego, któreto związki mogą służyć tak do stopniowego obliczania tych liczb, jak i do wyprowadzenia różnych ich wyrażeń wyznacznikowych. Nam będzie tu potrzebna głównie znana własność, zauważana przez Moivrea, wynikająca ze wzoru (6) dla $y=0$, t. j. własność $(n=2, 3, ...)$

$$(B+1)^n-B_n=0. \tag{7}$$

II.

Ponieważ, według (4), przy $n=1, 2, ...$, jest dla $y=0$

$$\varphi_n(0)=0, \tag{8}$$

przeto wszystkie funkcyje Bernoulliego są podzielne przez y, czyli, według (5), przez $\varphi_1(y)$.

Według (4), dla $y=1$ jest

$$\varphi_n(1)=(1+B)^n-B_n,$$

a więc, na mocy związku (7), przy $n=2, 3, ...$,

$$\varphi_n(1)=0, \tag{9}$$

t. j. wszystkie funkcyje Bernoulliego poczynając od 2-giéj, są podzielne przez $y-1$. Wskutek tego, na zasadzie własności (8), możemy powiedzieć, że one są podzielne przez $y(y-1)$, t. j. przez $\varphi_2(y)$, gdyż, skoro $B_1=-\frac{1}{2}$,

$$\varphi_2(y)=y^2+2B_1y=y^2-y=y(y-1).$$

Według (4), mamy

$$\varphi'_n(y) = n(y+B)^{n-1}$$
$$= n\left\{(y+B)^{n-1} - B_{n-1}\right\} + nB_{n-1},$$

czyli ($n = 2, 3, \ldots$)

(10) $$\varphi'_n(y) = n\left\{\varphi_{n-1}(y) + B_{n-1}\right\},$$

albo, przy $p = 2, 3, \ldots$, ponieważ $B_{2p-1} = 0$,

(11) $$\varphi'_{2p}(y) = 2p\,\varphi_{2p-1}(y),$$

(12) $$\varphi'_{2p-1}(y) = (2p-1)\left\{\varphi_{2p-2}(y) + B_{2p-2}\right\}.$$

Ponieważ, przy $p = 2, 3, \ldots$, funkcyje $\varphi_{2p-1}(y)$ i $\varphi_{2p}(y)$ mają spólny czynnik $y(y-1)$, przeto, przy tychże wartościach na p, według równości (11), wszystkie funkcyje $\varphi_{2p}(y)$, t. j. wszystkie funkcyje Bernoulliego, opatrzone wskaźnikiem parzystym, poczynając od 4-téj, są podzielne przez $y^2(y-1)^2$, czyli przez funkcyję $\varphi_4(y)$; bo, skoro $B_1 = -\frac{1}{2}$ $B_2 = \frac{1}{6}$, mamy, $\varphi_4(y) = y^4 + 4y^3B_1 + 6y^2B_2 = y^4 - 2y^3 + + y^2 = y^2(y-1)^2$.

Według określenia (4), biorąc $1-y$ zamiast y, mieć będziemy:

$$\varphi_n(1-y) = (1-y+B)^n - B_n$$
$$= (-1)^n\left\{(y-[B+1])^n - (-1)^n B_n\right\}.$$

Lecz w wyrazach rozwinięcia dwumianu

$$(y-[B+1])^n$$

możemy każde $[B+1]^m$, przy $m=2,3,\ldots$, na mocy związku (7), zastąpić przez B_m, wskutek czego $(l=1,2,\ldots)$

$$+(n)_{2l}\, y^{n-2l}\,[B+1]^{2l} = +(n)_{2l}\, y^{n-2l}\, B_{2l}\,,$$

$$-(n)_{2l+1}\, y^{n-2l-1}\,[B+1]^{2l+1} = -(n)_{2l+1}\, y^{n-2l-1}\, B_{2l+1}$$
$$= 0 = +(n)_{2l+1}\, y^{n-2l-1}\, B_{2l+1}\,.$$

Co się zaś tyczy wyrazu $-(n)_1\, y^{n-1}\,[B+1]^1$, to

$$-(n)_1\, y^{n-1}\,[B_1+1] = -(n)_1\, y^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = +(n)_1\, y^{n-1}\, B_1\,.$$

Nadto przy n parzystém, jest $(-1)^n B^n = +B_n$, przy nieparzystém zaś $n>1$, jest $(-1)^n B_n = 0 = +B_n$. Jest zatém wogóle, przy $n=2,3,\ldots$,

$$\varphi_n(1-y) = (-1)^n \left\{ (y+B)^n - B_n \right\},$$

a więc, według (4), $(n=2,3,\ldots)$

$$\varphi_n(1-y) = (-1)^n\, \varphi_n(y)\,. \qquad (13)$$

Z tego zaś związku wprost wynika, iż, przy nieparzystém $n>1$, dla $y=\frac{1}{2}$ mamy $(p=1,2,\ldots)$

$$\varphi_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0\,, \qquad (14)$$

t. j., że wszystkie funkcyje Bernoulliego, opatrzone wskaźnikiem nieparzystym, poczynając od 3-ciéj, są podzielne przez $y-\frac{1}{2}$. Gdy zaś są jeszcze, jak wiemy, podzielne przez $y(y-1)$, zatém są one także podzielne przez

$y\,(y-\frac{1}{2})\,(y-1)$, czyli przez $\varphi_3\,(y)$; bo według (4)

$$\varphi_3\,(y)=y^3+3y^2B_1+3yB_2=y^3-\frac{3}{2}\,y^2+\frac{1}{2}\,y=$$

$$=y\,(y-\frac{1}{2})(y-1).$$

III.

Nim wyznaczymy wartość $\varphi_{2p}\,(\frac{1}{2})$, zauważmy uprzednio, że wyprowadzone powyżéj wzory dają już nam co do téj wartości pewną wskazówkę. Podstawmy mianowicie we wzorze (13) $y+\frac{1}{2}$ zamiast y. Otrzymamy $(n=2, 3, ...)$

$$(15) \qquad \varphi_n\,(\frac{1}{2}-y)=(-1)^n\,\varphi_n\,(\frac{1}{2}+y)\,;$$

a więc, każde dwie wartości funkcyi $\varphi_{2p+1}\,(y)$, odpowiadające wartościom zmiennéj n, różniącym się bezwzględnie od liczby $\frac{1}{2}$ o tę samę liczbę, są co do wartości bezwzględnéj równe, lecz znaku różnego. Wskutek tego, wartość (14) nie przedstawia ani *maximum*, ani *minimum*, zaś wartość pochodnèj $\varphi'_{2p+1}\,(\frac{1}{2})$ jest od zera różna, a témsamém, według (12), suma dwu liczb $(p=1, 2, ...)$

$$\varphi_{2p}\,(\frac{1}{2})+B_{2p}$$

jest od zera różna.

Aby wyznaczyć wartość $\varphi_{2p}\,(\frac{1}{2})$, w wynikającém ze wzoru (4) wyrażeniu

$$\varphi_{2p}\,(y+\frac{1}{2})=(y+\frac{1}{2}+B)^{2p}-B_{2p}$$

$$=\left(\left[\frac{1}{2}+B\right]+y\right)^{2p}-B_{2p}$$

rozwińmy dwnmian $\left(\left[\frac{1}{2}+B\right]+y\right)^{2p}$ podług potęg rosnących y, a następnie w otrzymaném rozwinięciu przyjmijmy $y=\frac{1}{2}$. Biorąc pod uwagę własność (9), mieć będziemy

$$0=\left[\frac{1}{2}+B\right]^{2p}+(2p)_1\left[\frac{1}{2}+B\right]^{2p-1}\frac{1}{2}+\ldots+$$

$$+(2p)_m\left[\frac{1}{2}+B\right]^{2p-m}\frac{1}{2^m}+(2p)_{2p-2}\left[\frac{1}{2}+B\right]^2\frac{1}{2^{2p-2}}+$$

$$+\frac{1}{2^{2p}}-B_{2p},$$

gdyż $\frac{1}{2}+B_1=0$. Zważmy, że, według (4), jest ogólnie

$$\left[\frac{1}{2}+B\right]^m=\varphi_m\left(\frac{1}{2}\right)+B_m;$$

możemy zatém równość poprzedzającą, uwzględniając, że, przy $p=1, 2, \ldots$, według (14), $\varphi_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$, oraz, że wtedy $B_{2p+1}=0$, tak napisać:

$$0=\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right)+(2p)_2\left[\varphi_{2p-2}\left(\frac{1}{2}\right)+B_{2p-2}\right]\frac{1}{2^2}+$$

$$+\ldots+(2p)_{2p-2}\left[\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)+B_2\right]\frac{1}{2^{2p-2}}+\frac{1}{2^{2p}}.$$

Wstawiając to wyrażenie na $\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right)$ w stronę prawą równości poprzedzającéj, a następnie mnożąc obie strony przez 2^{2p-1}, otrzymamy

$$0=(2p)_2\left[\varphi_{2p-2}\left(\frac{1}{2}\right)+2B_{2p-2}\right]2^{2p-2}+\ldots+$$

$$+(2p)_{2p-2}\left[\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)+2B_2\right].2+(2p)_{2p-1}B_1+1.$$

Ze wzoru atoli (7), przy $n = 2p$, wynika

$$0 = (2p)_2 B_{2p-2} + \dots + (2p)_{2p-2} B_2 + (2p)_{2p-1} B_1 + 1.$$

Kładąc kolejno w obu ostatnich równościach (odpowiadających równościom Hoüela w *Cours de calcul infinitésimal*, art. 499) jednocześnie $p = 2, 3, \dots, q, q+1$, a otrzymane wyrażenie z sobą porównywając, wniesiemy stopniowo, iż

$$2\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) + (2^2 - 1) B_2 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$2^{2q-1} \varphi_{2q}\left(\frac{1}{2}\right) + (2^{2q} - 1) B_{2q} = 0.$$

Z ostatniéj równości — piszmy p zamiast q — otrzymujemy ogólnie ($p = 1, 2, \dots$)

$$\varphi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - 2^{2p}}{2^{2p-1}} B_{2p}. \tag{16}$$

Mając ten wzór, możemy naprzód wyprowadzić dwa, odpowiadające sobie, związki między liczbami Bernoulliego. Zważmy mianowicie, że, według (4), jest ogólnie ($n = 1, 2, \dots$)

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + B\right)^n - B_n,$$

czyli

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1 + 2B}{2}\right)^n - B_n,$$

albo jeszcze ($n = 1, 2, \dots$)

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\left[(2B + 1)^n - 2^n B_n\right]. \tag{17}$$

Przy $n=2p$, z równości (16) i (17) wynika

$$2(1-1^{2p})B_{2p}=(2B+1)^{2p}-2^{2p}B_{2p}, \tag{18}$$

czyli

$$2(1-2^{2p})B_{2p}=(2p)_2\,2^{2p-2}B_{2p-2}+(2p)_4\,2^{2p-4}B_{2p-4}+$$
$$+\ldots+(2p)_{2p-2}\,2^2B_2+(2p)_{2p-1}\,2B_1+1.$$

Przy $n=2p+1$, z równości (14) i (17) wynika ($p=1,2,\ldots$, oraz może tu być widocznie $p=0$)

$$0=(2B+1)^{2p+1}, \tag{19}$$

czyli

$$0=(2p+1)_1\,2^{2p}B_{2p}+(2p+1)_3\,2^{2p-2}B_{2p-2}+\ldots+$$
$$+(2p+1)_{2p-1}\,2^2B_2+(2p+1)_{2p}\,2B_1+1.$$

Zważmy następnie że, podstawiając $y=-\frac{1}{2}$ w obu stronach wzoru (6), otrzymujemy równość ($n=2,3,\ldots$; dla téj szczególnéj wartości y także $n=1$)

$$(2B+1)^n-(2B-1)^n=2n(-1)^{n-1},$$

którą podaje Lucas w przytoczonéj rozprawie. A więc, przy $n=2p+1$, na mocy związku (19), mamy ($p=0,1,\ldots$)

$$(2B-1)^{2p+1}=-2(2p+1), \tag{20}$$

czyli

$$(2p+1)_1\,2^{2p}B_{2p}+(2p+1)_3\,2^{2p-2}B_{2p-2}+\ldots+$$
$$+(2p+1)_{2p-1}\,2^2B_2-(2p+1)_{2p}\,2B_1+1=2(2p+1).$$

Z każdego ze związków (18), (19) i (20) wynikają odpowiednie wyrażenia wyznacznikowe dla liczby B_{2p}.

IV.

Ze wzoru (15) wynika, że funkcyja $\varphi_n(y+\frac{1}{2})$, przy $n=2,3,\ldots$, jest względem y funkcyją parzystą, gdy n jest parzyste, a nieparzystą, gdy n nieparzyste. Innemi słowy, każda funkcyja BERNOULLIEGO $\varphi_n(y)$, przy $n=2,3,\ldots$, jest względem $y-\frac{1}{2}$ funkcyją parzystą lub nieparzystą, stósownie do tego, czy wskaźnik jéj n jest liczbą parzystą, czy téż nieparzystą.

Przy pomocy tegoż wzoru (15) można wartość funkcyi $\varphi_n(y)$, przy $n=2,3,\ldots$, otrzymaną dla jakiéjkolwiek wartości ujemnéj $y_1=-\eta_1=\frac{1}{2}-(\eta_1+\frac{1}{2})$ wyrazić przez wartość téj funkcyi dla wartości dodatnéj $y_2=\eta_1+1$. Pisząc zaś we wzorze (6′) zamiast y kolejno $y, y+1, y+2,\ldots, y+m-1$, a tak otrzymane równości dodając do siebie stronami odpowiedniemi, dochodzimy do związku ($n=2,3,\ldots$; m liczba dodatna całkowita).

$$\varphi_n(y+m)=\varphi_n(y)+n\left\{y^{n-1}+(y+1)^{n-1}+\ldots+\right.$$
$$\left.+(y+m-1)^{n-1}\right\},$$

przy pomocy którego każdą wartość funkcyi $\varphi_n(y)$ dla wartości $y_3>1$, gdy przyjmiemy $y_3=m+y_4$, gdzie już $0<y_4<1$, można wyrazić zapomocą wartości $\varphi_n(y_4)$. Nakoniec wzór (15) dozwala nam każdą wartość funkcyi $\varphi_n(y)$ dla y_5 takiego, iż $\frac{1}{2}<y_5<1$, gdy przyjmiemy $y_5=$ $=\frac{1}{2}+y_6$, gdzie zatém $0<y_6<\frac{1}{2}$, wyrazić zapomocą wartości $\varphi_n(y_6)$. A więc, wartości funkcyj BERNOULLIEGO $\varphi_n(y)$,

przy $n = 2, 3, \ldots$, dla jakichkolwiek wartości zmiennéj y, można sprowadzić do ich wartości, odpowiadających wartościom zmiennéj y od $y = 0$ do $y = \frac{1}{2}$.

Ze względu na zastósowania, ważne jest zbadanie zmiany wartości funkcyj Bernoulliego $\varphi_n(y)$, przy $n = 2, 3, \ldots$, dla wartości zmiennéj y od $y = 0$ do $y = 1$ i wyznaczenie ile jest wartości funkcyj $\varphi_n(y)$, przedstawiających w tym przedziale *maximum* lub *minimum*. W tym celu, po zbadaniu bezpośredniém funkcyi $\varphi_2(y)$, wypadnie korzystać z własności (8), (9), (11), (12), (14) i (16).

Z własności (10) wypada, iż ($n = 2, 3, \ldots$)

$$\varphi_n(y) = n \int_0^x \left\{ \varphi_{n-1}(y) + B_{n-1} \right\} dy, \qquad (21)$$

co niektórzy przyjmują jako określenie funkcyj Bernoulliego, biorąc wówczas jako piérwszą, funkcyję (5), oraz zakładając, że zachodzą własności (8) i (9), które pozwalają wyznaczyć stopniowo ze związków (21) liczby $B_1, B_2, \ldots$. Ze wzoru (21), na mocy znanego zmieniania się wartości funkcyj Bernoulliego $\varphi_n(y)$ od $y = 0$ do $y = 1$, wynika ważne ich zastósowanie do utworzenia wyrazu dopełniającego wyrażeń, otrzymywanych przy obliczaniu całek oznaczonych sposobem Maclaurina, nazywanym także sposobem Eulera.

Warszawa, 8 Grudnia 1884 r.